Universidade Federal de Ouro Preto – UFOP
Departamento de Computação e Sistemas – DECSI
Disciplina: Matemática Discreta – CSI 443
Professor: Bruno Hott (brhott@ufop.edu.br)

Lista de Exercícios 03:
Álgebra Booleana

Revisão

1. Responda formalmente as seguintes questões:

   a) O que é equivalência lógica?

   > Dizemos que duas fórmulas α e β são equivalentes, $\alpha \equiv \beta$, se estas possuem o mesmo valor lógico para uma mesma atribuição de valores às suas variáveis. Podemos verificar se α e β são equivalentes se a fórmula $\alpha \leftrightarrow \beta$ é uma tautologia.

   b) Defina as noções de "sequência de igualdades" e "indiscernibilidade de valores iguais".

   > A noção de "sequência de igualdades" é fomalizada em termos da seguinte propriedade denominada *transitividade*: se $a = b$ e $b = c$ então $a = c$.
   >
   > A "indiscernibilidade de valores iguais" é comumente citada na comunidade de lógica e teoria de tipos como regra de Leibniz, que pode ser expressa da seguinte maneira: Seja P uma propriedade qualquer, se sabemos que $x = y$ e que a propriedade P é verdadeira para x, então esta também deve ser para o valor y.

   c) O que é um conjunto completo de conectivos?

   > Seja $\mathcal{C} \subseteq \{\perp, \neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ um conjunto de conectivos. Dizemos que $\mathcal{C}$ é completo para $\{\perp, \neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ se é possível expressar todos os conectivos não presentes em $\mathcal{C}$ em termos dos conectivos presentes no conjunto $\mathcal{C}$ e variáveis.

   d) O que são as formas normais conjuntiva e disjuntiva?

   > Definimos o conjunto de fórmulas da lógica proposicional na forma normal conjuntiva (FNC), da seguinte maneira:
   >
   > 1. As constantes lógicas $\perp$ e $\top$ são fórmulas na forma normal conjuntiva.
   > 2. Seja $\mathcal{V}$ o conjunto de todas as variáveis da lógica proposicional. Então $\alpha \in \mathcal{V}$ e $\neg\alpha \in \mathcal{V}$ fórmulas na forma normal conjuntiva. Dá-se o nome de literal a fórmulas que são variáveis ou negação de variáveis.
   > 3. Seja $\{l_1, ..., l_n\}$ um conjunto de $n \geq 0$ literais. Então, $\displaystyle\bigvee_{i=1}^{n} l_i$ é uma fórmula na forma normal conjuntiva. Dá-se o nome de cláusula a fórmulas que consistem apenas de uma disjunção de literais.
   > 4. Seja $\{C_1, ..., C_n\}$ um conjunto de $n \geq 0$ literais. Então, $\displaystyle\bigwedge_{i=1}^{n} C_i$ é uma fórmula na forma normal conjuntiva.
   >
   > Definimos o conjunto de fórmulas da lógica proposicional na forma normal disjuntiva (FND), da seguinte maneira:
   >
   > 1. As constantes lógicas $\perp$ e $\top$ são fórmulas na forma normal disjuntiva.

2. Seja $\mathcal{V}$ o conjunto de todas as variáveis da lógica proposicional. Então $\alpha \in \mathcal{V}$ e $\neg\alpha \in \mathcal{V}$ fórmulas na forma normal disjuntiva. Dá-se o nome de literal a fórmulas que são variáveis ou negação de variáveis.

3. Seja $\{l_1, ..., l_n\}$ um conjunto de $n \geq 0$ literais. Então, $\bigwedge_{i=1}^{n} l_i$ é uma fórmula na forma normal disjuntiva. Dá-se o nome de cláusula a fórmulas que consistem apenas de uma conjunção de literais.

4. Seja $\{C_1, ..., C_n\}$ um conjunto de $n \geq 0$ literais. Então, $\bigvee_{i=1}^{n} C_i$ é uma fórmula na forma normal disjuntiva.

e) Discorra sobre a seguinte afirmação: "a deução natral é correta e completa".

A dedução natural é um sistema de prova correto e completo para a lógica proposicional. Essas propriedades são enunciadas a seguir.

Correção da dedução natural. Seja α uma fórmula bem formada qualquer da lógca proposicional. Se $\vdash \alpha$, então $\vDash \alpha$.

Completude da dedução natural. Seja α uma fórmula bem formada qualquer da lógca proposicional. Se $\vDash \alpha$, então $\vdash \alpha$.

Exercícios

2. (Ribeiro 2.6.6.1) Determine se as seguintes fórmulas são ou não equivalentes:

a) $P \leftrightarrow Q$ e $(P \rightarrow Q) \wedge (\neg P \rightarrow \neg Q)$

As fórmulas são equivalentes, como mostrado pela tabela verdade.

P	Q	P	$\leftrightarrow$	Q	(P	$\rightarrow$	Q)	$\wedge$	($\neg$	P	$\rightarrow$	$\neg$	Q)
T	T	T	T	T	T	T	T	T	F	T	T	F	T
T	F	T	F	F	T	F	F	F	F	T	T	T	F
F	T	F	F	T	F	T	T	F	T	F	F	F	T
F	F	F	T	F	F	T	F	T	T	F	T	T	F

b) $(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$ e $(P \vee Q) \wedge \neg(P \wedge Q)$

As fórmulas são equivalentes, como mostrado pela tabela verdade.

P	Q	(P	$\wedge$	$\neg$	Q)	$\vee$	($\neg$	P	$\wedge$	Q)	(P	$\vee$	Q)	$\wedge$	$\neg$	(P	$\wedge$	Q)
T	T	T	F	F	T	F	F	T	F	T	T	T	T	F	F	T	T	T
T	F	T	T	T	F	T	F	T	F	F	T	T	F	T	T	T	F	F
F	T	F	F	F	T	T	T	F	T	T	F	T	T	T	T	F	F	T
F	F	F	F	T	F	F	T	F	F	F	F	F	F	F	T	F	F	F

3. (Ribeiro 2.6.6.2) Prove as seguintes equivalências usando raciocínio algébrico:

a) $(A \vee B) \wedge B \equiv B$

$$
\begin{aligned}
(A \vee B) \wedge B &\equiv \\
(A \vee B) \wedge (B \vee \bot) &\equiv \\
B \vee (A \wedge \bot) &\equiv \\
B \vee \bot &\equiv \\
B &
\end{aligned}
$$

b) $(\neg A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B) \equiv (A \vee B) \wedge \neg(A \wedge B)$

$$
\begin{aligned}
(\neg A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B) &\equiv \\
[(\neg A \wedge B) \vee A] \wedge [(\neg A \wedge B) \vee \neg B)] &\equiv \\
[(\neg A \vee A) \wedge (B \vee A)] \wedge [(\neg A \vee \neg B) \wedge (B \vee \neg B)] &\equiv \\
[\top \wedge (B \vee A)] \wedge [(\neg A \vee \neg B) \wedge (\top)] &\equiv \\
(A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg B) &\equiv \\
(A \vee B) \wedge \neg(A \wedge B)&
\end{aligned}
$$

c) $((A \to B) \to A) \to A \equiv \top$

$$
\begin{aligned}
[(A \to B) \to A] \to A &\equiv \\
[(\neg A \vee B) \to A] \to A &\equiv \\
[\neg(\neg A \vee B) \vee A] \to A &\equiv \\
[(A \wedge \neg B) \vee A] \to A &\equiv \\
\neg[(A \wedge \neg B) \vee A] \vee A &\equiv \\
[\neg(A \wedge \neg B) \wedge \neg A] \vee A &\equiv \\
[(\neg A \vee B) \wedge \neg A] \vee A &\equiv \\
[\neg A \vee B \vee A] \wedge [\neg A \vee A] &\equiv \\
[\top \vee B] \wedge \top &\equiv \\
\top \wedge \top &\equiv \\
\top &
\end{aligned}
$$

4. (Ribeiro 2.6.6.5) Descreva como podemos determinar que uma fórmula é uma tautologia utilizando leis da álgebra booleana.

Dizemos que uma fórmula é uma tautologia se esta é sempre verdadeira independente do valor lógico de suas variáveis. Sintaticamente, representamos como $\top$ uma fórmula verdadeira. Logo, podemos determinar que uma fórmula α é uma tautologia se conseguirmos provar, usando raciocínio algébrico, a seguinte equivalência: $\alpha \equiv \top$.

5. (Ribeiro 2.7.3.1) Para cada uma das fórmulas a seguir, apresente fórmulas equivalentes na forma normal conjuntiva e disjuntiva.

a) $(A \wedge B) \vee C \to A \wedge (B \vee C)$

$$
\begin{aligned}
[(A \land B) \lor C] \to [A \land (B \lor C)] &\equiv \\
\neg[(A \land B) \lor C] \lor [A \land (B \lor C)] &\equiv \\
[\neg(A \land B) \land \neg C] \lor [A \land (B \lor C)] &\equiv \\
[(\neg A \lor \neg B) \land \neg C] \lor [A \land (B \lor C)] &\equiv \\
[((\neg A \lor \neg B) \land \neg C) \lor A] \land [((\neg A \lor \neg B) \land \neg C) \lor (B \lor C)] &\equiv \\
[(\neg A \lor \neg B \lor A) \land (\neg C \lor A)] \land [(\neg A \lor \neg B \lor B \lor C) \land (\neg C \lor B \lor C)] &\equiv \\
(\neg A \lor \neg B \lor A) \land (\neg C \lor A) \land (\neg A \lor \neg B \lor B \lor C) \land (\neg C \lor B \lor C) &\equiv \{\text{FNC}\} \\
\top \land (\neg C \lor A) \land \top \land \top &\equiv \{\text{FNC}\} \\
(\neg C \lor A) &\leftarrow \{\text{FNC}\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[(A \land B) \lor C] \to [A \land (B \lor C)] &\equiv \\
\neg[(A \land B) \lor C] \lor [A \land (B \lor C)] &\equiv \\
[\neg(A \land B) \land \neg C] \lor [A \land (B \lor C)] &\equiv \\
[(\neg A \lor \neg B) \land \neg C] \lor [A \land (B \lor C)] &\equiv \\
(\neg A \land \neg C) \lor (\neg B \land \neg C) \lor (A \land B) \lor (A \land C) &\leftarrow \{\text{FND}\}
\end{aligned}
$$

b) $A \land \neg(\neg A \lor \neg B)$

$$
\begin{aligned}
A \land \neg(\neg A \lor \neg B) &\equiv \\
A \land A \land B &\equiv \{\text{FNC e FND}\} \\
A \land B &\leftarrow \{\text{FNC e FND}\}
\end{aligned}
$$

c) $A \land B \to \neg A$

$$
\begin{aligned}
A \land B \to \neg A &\equiv \\
\neg(A \land B) \lor \neg A &\equiv \\
\neg A \lor \neg B \lor \neg A &\equiv \{\text{FNC e FND}\} \\
\neg A \lor \neg B &\leftarrow \{\text{FNC e FND}\}
\end{aligned}
$$

Referências

[1] Rodrigo G Ribeiro. Notas de aula de matemática discreta, 2016.

[2] Kenneth H Rosen. Matemática discreta e suas aplicações. Sexta edição, 2009.